Метод циклической редукции

Также как и метод прогонки заключается в исключении из уравнений неизвестных, однако, отличается тем, что исключение ведется одновременно по всему рассматриваемому участку.

Рисунок 1 – сравнение метода прогонки и метода циклической редукции на одном временном участке

Из этих графиков видно, что метод прогонки является более линейным, и, следовательно, позволяет быстрее получить результат

Рассмотри решение методом циклической редукции. Имеем уравнение:

Которое представляет собой СЛАУ с трехдиагональной матрицей (для примера ограничимся 7-ью узлами):

Метод циклической редукции, как и метод прогонки, делится на прямой и обратный ход. На прямом ходе исключаются неизвестные из уравнений, сначала нечетные, потом четные (рисунок 2). В результате всех операций получаем одно уравнение, из которого легко находим значение одной оставшейся неизвестной. На обратном ходе значение этой неизвестной подставляется в уравнения матрицы и находятся значения оставшихся неизвестных.

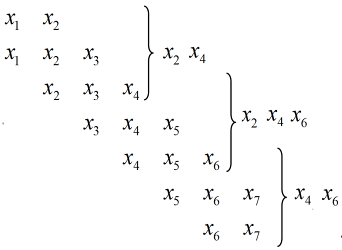


Рисунок 2 – схема прямого хода метода редукции

Рассмотрим первую тройку уравнений:

Выразим из первого уравнения :

И подставляем во второе уравнение:

Затем преобразуем это уравнение (перегруппировываем и домнажаем на В):

(1)

И домножим третье уравнение на А:

(2)

Теперь вычтем из (1) - (2):

После проделывания этих же операций со второй и третьей тройками, получим систему уравнений:

Проделываем те же операции и с этой тройкой уравнений:

Домножим на и перегруппируем:

-=

=)

=)

А третье уравнение домножим на :

И сложим его из предыдущего уравнения:

На этом прямой ход метода циклической редукции закончен. Теперь необходимо, зная значение одной переменной, найти значение других.

Выразим :

Затем подставим его в выражение для и :

А их в оставшиеся уравнения:

Но также из граничных условий нам известны значения и , поэтому для них просто берем известные значения вместо уравнений.

Таким образом, мы получили решение СЛАУ (распределение температуры по длине стержня) на одном шаге по времени. То есть зная значение температуры на предыдущем шаге (граничные условия и 0-ые значения), которые содержатся в для одного шага по времени, мы получаем распределение на следующем шаге. При этом изменяется значение и, следовательно, мы получаем новое распределение. И так мы можем получить распределение температуры через любое кол-во итераций. Но для более сложных систем этот метод становится очень трудоемким и лучше использовать метод прогонки, который проще и позволяет получить решение быстрее, чем метод циклической редукции.